Retas no Espaço

Laura Goulart

UESB

28 de Agosto de 2018

Equação Vetorial da Reta

Um dos principais axiomas da Geometria Euclidiana diz que dois pontos distintos A e B determinam uma única reta r. Assim, para cada ponto P qualquer da reta temos que $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são l.d.

Equação Vetorial da Reta

Um dos principais axiomas da Geometria Euclidiana diz que dois pontos distintos A e B determinam uma única reta r. Assim, para cada ponto P qualquer da reta temos que $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são l.d.
Logo, $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ para algum $t \in \mathbb{R}$.

Equação Vetorial da Reta

Um dos principais axiomas da Geometria Euclidiana diz que dois pontos distintos A e B determinam uma única reta r. Assim, para cada ponto P qualquer da reta temos que $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são l.d.
Logo, $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ para algum $t \in \mathbb{R}$.
Portanto,

$$P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

Um dos principais axiomas da Geometria Euclidiana diz que dois pontos distintos A e B determinam uma única reta r. Assim, para cada ponto P qualquer da reta temos que $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são l.d.
Logo, $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ para algum $t \in \mathbb{R}$.
Portanto,

$$P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

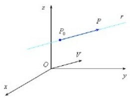
O vetor $\overrightarrow{AB}$ é denominado vetor diretor da reta r e t é chamado de parâmetro.

Observações

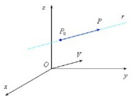
1) O vetor diretor da equação 1 serve para fixar a direção da reta enquanto que o ponto serve para fixar a posição da reta no espaço.

Observações

1) O vetor diretor da equação 1 serve para fixar a direção da reta enquanto que o ponto serve para fixar a posição da reta no espaço.
2) É fundamental para determinar a equação vetorial da reta conhecermos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e o vetor diretor $\vec{u} = (a, b, c)$.



1) O vetor diretor da equação 1 serve para fixar a direção da reta enquanto que o ponto serve para fixar a posição da reta no espaço.
2) É fundamental para determinar a equação vetorial da reta conhecermos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e o vetor diretor $\vec{u} = (a, b, c)$.



3) A equação 1 não é única, basta escolher um outro ponto da reta, como por exemplo o ponto B ao invés do ponto A.

Exemplos

1) Ache a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $A(3, -1, 1)$ e $B(2, 1, 2)$.

Exemplos

1) Ache a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $A(3,-1,1)$ e $B(2,1,2)$.
2) Verifique se o ponto $P(-1,0,2)$ pertence a reta $X=(-7,-3,-7)+t(2,1,3)$.

Equação Paramétrica da Reta

A equação vetorial $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a, b, c)$ equivale ao sistema:

Equação Paramétrica da Reta

A equação vetorial $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a, b, c)$ equivale ao sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases} \tag{2}$$

chamada de *equação paramétrica da reta.*

Observação

O parâmetro t da equação 2 pode ser interpretado como o instante de tempo, se o ponto $P(x, y, z)$ descreve o movimento retilíneo uniforme de uma partícula com vetor velocidade $\vec{u}$.

Exemplos

1) Ache a equação paramétrica da reta que tem direção $\vec{u_r} = (-3, -1, 0)$ e passa pelo ponto $P_0(1, 1, 2)$.

Exemplos

1) Ache a equação paramétrica da reta que tem direção $\vec{u_r} = (-3, -1, 0)$ e passa pelo ponto $P_0(1, 1, 2)$.

2) Ache o vetor diretor e um ponto da reta $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 \\ z = 2t \end{cases}$.

Exemplos

1) Ache a equação paramétrica da reta que tem direção $\vec{u_r} = (-3, -1, 0)$ e passa pelo ponto $P_0(1, 1, 2)$.

2) Ache o vetor diretor e um ponto da reta $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 \\ z = 2t \end{cases}$.

3) Ache a equação vetorial da reta $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

Equação Simétrica da Reta

Se todas as componentes do vetor diretor da reta r são não nulas, podemos isolar o parâmetro t em cada equação de 2 e igualar os resultados obtendo o que chamamos de *equação simétrica da reta* dada por:

Equação Simétrica da Reta

Se todas as componentes do vetor diretor da reta r são não nulas, podemos isolar o parâmetro t em cada equação de 2 e igualar os resultados obtendo o que chamamos de *equação simétrica da reta* dada por:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{3}$$

Exemplos

1) Ache a equação simétrica da reta que passa pelos pontos $A(-1,2,0)$ e $B(1,1,1)$.

Exemplos

1) Ache a equação simétrica da reta que passa pelos pontos $A(-1,2,0)$ e $B(1,1,1)$.

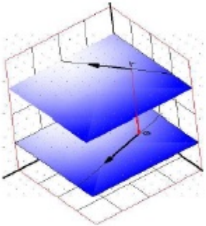
3) Ache as equações vetorial e paramétrica da reta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = -z.$

Posição relativa entre retas

Duas retas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas e para estudar a posição relativa vamos dividir o nosso estudo nesses casos.
Considere as retas $r : P = A + t \cdot \vec{u_r}$ e $s : P = B + h \cdot \vec{u_s}$.

r e s são retas reversas(ou não coplanares)

$$[\vec{u_r}, \vec{u_s}, \vec{AB}] \neq 0$$

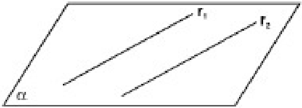


Exemplo

Verifique se $r : P = (1,2,3) + t(0,1,3)$ e $s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$ são reversas.

r e s coplanares e paralelas

u_r e u_s são ld.

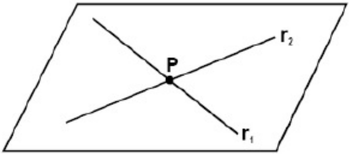


Exemplo

Verifique se $r : P = (1,1,1) + t(6,8,2)$ e $s : \begin{cases} x = 4 + 18h \\ y = 6 + 24h \\ z = 3 + 6h \end{cases}$ são paralelas.

r e s coplanares e concorrentes

u_r e u_s são li.



Exemplo

Verifique se $r : (1,0,0) + t(1,1,1)$ e $s : x - 2 = 3 - y = \dfrac{z}{2}$ são concorrentes.

Observação

Um ponto pode ser obtido a partir da intersecção de duas retas concorrentes. Note que a determinação das coordenadas do ponto fica condicionada à resolução de um sistema linear formado pelas equações das retas.

Um ponto pode ser obtido a partir da intersecção de duas retas concorrentes. Note que a determinação das coordenadas do ponto fica condicionada à resolução de um sistema linear formado pelas equações das retas.

Exemplo

Determine o ponto de intersecção das retas $r : x - 2 = -y = z - 1$ *e*

$$s : \begin{cases} x = 4 + h \\ y = -2 - h \\ z = 3 \end{cases} .$$

Ângulo entre retas

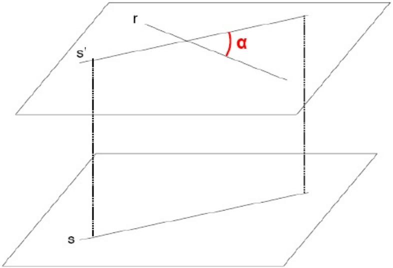
Sejam r e s retas concorrentes que se interceptam formando quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice.

Sejam r e s retas concorrentes que se interceptam formando quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice.
O ângulo entre as retas é definido como sendo o menor destes ângulo. É claro que o ângulo agudo formado pela retas é o mesmo formado pelos vetores diretores delas.

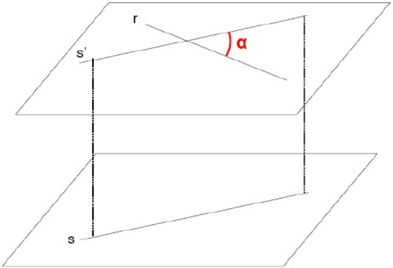
Ângulo entre retas

Sejam r e s retas concorrentes que se interceptam formando quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice.
O ângulo entre as retas é definido como sendo o menor destes ângulo. É claro que o ângulo agudo formado pela retas é o mesmo formado pelos vetores diretores delas.
Logo, $\cos(r,s) = \dfrac{|<\vec{u}_r, \vec{u}_s>|}{||\vec{u}_r|| \cdot ||\vec{u}_s||}$ com $0 \leq (r,s) \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Se as retas r e s são reversas, existe uma reta s' paralela a reta s interceptando a reta r em um ponto. O ângulo entre r e s é definido como sendo o ângulo entre r e s'.



Se as retas r e s são reversas, existe uma reta s' paralela a reta s interceptando a reta r em um ponto. O ângulo entre r e s é definido como sendo o ângulo entre r e s'.



Observação

No caso em que as retas são paralelas diremos que o ângulo é nulo.

Exemplo

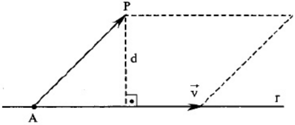
Calcule o ângulo entre as retas $r : P = t(1, -1, 1)$ e $s : \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 2h \\ z = 2 - h \end{cases}$.

Distância entre ponto e reta

Para entendermos melhor a distância no espaço, é necessário relembrarmos que dados $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ pontos no espaço, chama-se distância entre eles a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Para entendermos melhor a distância no espaço, é necessário relembrarmos que dados $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ pontos no espaço, chama-se distância entre eles a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$.
Portanto, $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Para entendermos melhor a distância no espaço, é necessário relembrarmos que dados $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ pontos no espaço, chama-se distância entre eles a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$.
Portanto, $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.
Dado um ponto $P(x_1, y_1, z_1)$ e uma reta $r : P_0 + t\vec{u}$, a distância entre P e r é o menor comprimento dos segmentos $\overline{PR}$, onde $R \in r$. É claro que este mínimo é atingido quando o vetor $\overrightarrow{PR}$ é ortogonal ao vetor diretor da reta.



Lembremos que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{u}$ é justamente $||\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}||$, onde a base mede $||\vec{u}||$ e a altura é a distância procurada.

Lembremos que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{u}$ é justamente $||\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}||$, onde a base mede $||\vec{u}||$ e a altura é a distância procurada.
Logo,

$$d(P, r) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}||}{||\vec{u}||}.$$

Lembremos que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{u}$ é justamente $||\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}||$, onde a base mede $||\vec{u}||$ e a altura é a distância procurada.
Logo,

$$d(P, r) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}||}{||\vec{u}||}.$$

Observe que este método independe da escolha do ponto da reta.

Exemplo

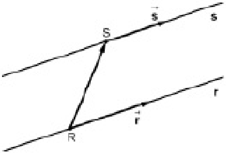
Calcule a distância entre o ponto $P(1,1,0)$ e $r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$.

Distância entre retas

A distância entre as retas $r : R + t\overrightarrow{u_r}$ e $s : S + t\overrightarrow{u_s}$ é definida como a menor distância entre os pontos das retas. E para determinar esta distância é necessário saber primeiro qual é a posição relativa delas.

Distância entre retas - Retas paralelas

Se as retas r e s são paralelas então $d(r,s) = d(R,s)$ ou $d(r,s) = d(r,S)$.



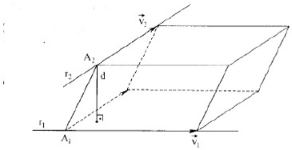
Exemplo

Ache a distância entre as retas $r : P = (1,0,2) + t(1,1,1)$ e $s : x - 1 = y + 2 = z - 3$.

Distância entre retas - Retas reversas

Os vetores $\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}$ e $\overrightarrow{u_s}$ por serem não coplanares, eles determinam um paralelepípedo cuja a altura é a distância $d(r, s)$ que se quer calcular.

Os vetores $\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}$ e $\overrightarrow{u_s}$ por serem não coplanares, eles determinam um paralelepípedo cuja a altura é a distância $d(r,s)$ que se quer calcular. Lembremos que o volume do paralelepípedo é dado por área da base vezes altura. Observemos que no paralelepípedo em questão a área da base é dada por $||\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}||$.



Por outro lado, como já foi visto, a área do paralelepípedo é dada por $|[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|$.

Por outro lado, como já foi visto, a área do paralelepípedo é dada por $|[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|$.

Portanto, $d(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{||\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}||}$.

Exemplo

Ache a distância entre as retas $r : P = (1, 1, 1) + t(-1, 2, 1)$ e $s : P = (1, 1, 3) + h(2, 1, 3)$.

Se as retas são concorrentes diremos que a distância entre elas é nula.